

# 1 Jednačina ravni u prostoru

## I slučaj

Neka je dat vektor  $\vec{n} = (A, B, C)$  i tačka  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Jednačina ravni koja prolazi kroz tačku  $M_0$  i normalna je na dati vektor  $\vec{n}$  je

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ako u prethodnoj jednačini označimo  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$  dobijamo opštu skalarnu jednačinu ravni:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

Obrnuto, ako je ravan data jednačinom (1), odmah znamo da je njen vektor normale određen sa  $\vec{n} = (A, B, C)$ .

1. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku  $M_0 = (-2, 1, 3)$  i

- ima vektor normale  $3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$
- paralelna je vektorima  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$  i  $\vec{b} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ .

## II slučaj

Neka su date tri nekolinearne tačke  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . Jednačina ravni koja sadrži date tačke određena je determinantom:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

2. Napisati jednačinu ravni koja

- prolazi kroz tačke  $A(0, -1, 5)$ ,  $B(4, 2, -1)$  i  $C(-2, 2, 1)$ ,
- ima odsečke na koordinatnim osama  $a = 5$ ,  $b = -2$  i  $c = 1$ .

3. Napisati jednačinu ravni koja

- odseca na  $z$ -osi odsečak  $-2$  i normalna je na  $z$ -osu.
- odseca na  $x$ -osi  $a = 2$ , na  $y$ -osi  $b = 4$  i paralelna je  $z$ -osi.

4. Data je ravan  $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ . Odrediti uglove između normale ravni i koordinatnih osa.

5. Odrediti ugao između ravni  $\alpha : x - 2y + 3z - 8 = 0$  i  $\beta : x + z - 6 = 0$ .

Odavde možemo da primetimo opštu formulu za izračunavanje ugla između dve ravni  $\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ :

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

6. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku  $M(2, -1, 1)$  i normalna je na ravni  $\beta : 3x + 2y - z + 4 = 0$  i  $\gamma : x + y + z = 3$ .

7. Napisati jednačinu ravni normalne na sredinu duži  $AB$ , ako je  $A(1, -2, 5)$  i  $B(3, -4, 1)$ .

Rastojanje tačke  $M(x_1, y_1, z_1)$  od ravni  $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$  nalazimo formulom:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

8. Izračunati rastojanje tačke  $M(4, 3, -2)$  od ravni  $3x - y + 5z + 1 = 0$ .

9. Izračunati rastojanje između ravni  $\alpha : x - 2y + 3z - 5 = 0$  i  $\beta : x - 2y + 3z - 1 = 0$ .

## 2 Jednačina prave u prostoru

### I slučaj

Jednačina ravni koja prolazi kroz tačku  $M(x_0, y_0, z_0)$  u pravcu vektora  $\vec{p} = (l, m, n)$  je:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

### II slučaj

Takodje, prava može biti zadata u preseku dve ravni, pa se njena jednačina dobija iz sistema:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

### III slučaj

Jednačina prave koja prolazi kroz tačke  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  je

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

1. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku  $M(1, 0, 1)$  i paralelna je pravoj  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{7}$ .
2. Za koju vrednost parametra  $D$  prava  $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$  seče  $z$ -osu?
3. Date su tačke preseka prave sa dvema koordinatnim ravnima:  $(x_1, y_1, 0)$  i  $(x_2, 0, y_2)$ . Izračunati koordinate preseka te prave sa trećom koordinatnom ravni.
4. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku  $A(1, -5, 3)$  i sa koordinatnim osama gradi redom uglove  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  i  $\frac{2\pi}{3}$ .
5. Odrediti ugao koji grade prave  $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$  i  $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ .
6. Napisati jednačinu normale iz tačke  $A(2, 3, 1)$  na pravu  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ .
7. Napisati jednačinu zajedničke normale pravih  $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$  i  $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ .

## 3 Odnos prave i ravni

1. Naći tačku preseka prave  $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$  i ravni  $3x + 5y - z - 2 = 0$ .
2. Za koju vrednost parametra  $A$  je ravan  $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$  paralelna pravoj  $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$ ?
3. Naći projekciju tačke  $A(4, -3, 1)$  na ravan  $x - 2y - z - 3 = 0$ .
4. Naći rastojanje tačke  $P(2, -1, 3)$  od prave  $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$ .